شریف جزوه

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

مرور و خلاصه‌ی درس

مرکز جرم مرکز جرم دستگاهی شامل n ذره، بنا به تعریف نقطه‌ای است که مختصات آن چنین داده می‌شود

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \ , \ y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i ,$$

$$z_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (۹-۵)$$

یا

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i , \qquad (۹-۸)$$

که در آن M جرم کلّ دستگاه است.

قانون دوم نیوتون برای دستگاهی از ذرات حرکت مرکز جرم هر دستگاهی از ذرات از **قانون دوم نیوتون برای دستگاهی از ذرات** پیروی می‌کند که عبارت است از

$$\vec{F}_{net} = M\vec{a}_{com} \qquad (۹-۱۴)$$

که در اینجا $\vec{F}_{net}$ نیروی خالص همه‌ی نیروهای خارجی وارد بر دستگاه، M جرم کلّ دستگاه و $\vec{a}_{com}$ شتاب مرکز جرم دستگاه است.

تکانه‌ی خطی و قانون دوم نیوتون برای یک تک‌ذره، کمیت $\vec{p}$ موسوم به **تکانه‌ی خطی** را چنین تعریف می‌کنیم

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (۹-۲۲)$$

و می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برحسب این تکانه چنین بنویسیم

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۹-۲۳)$$

برای دستگاهی از ذرات، این دو رابطه چنین می‌شوند

$$\vec{P} = M\vec{v}_{com} \quad \text{و} \quad \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (۹-۲۵ \text{ و } ۹-۲۷)$$

برخورد و ضربه به‌کارگیری شکل تکانه‌ای قانون دوم نیوتون، برای جسمی ذره‌مانند که در یک برخورد شرکت می‌کند به قضیه‌ی **ضربه- تکانه‌ی خطی** می‌انجامد:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J} \qquad (۹-۳۱ \text{ و } ۹-۳۲)$$

که در آن $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ تغییر تکانه‌ی خطی جسم و $\vec{J}$ **ضربه‌ی** ناشی از نیروی $\vec{F}(t)$ است که توسط جسم دیگر حاضر در برخورد وارد می‌شود:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \qquad (۹-۳۰)$$

اگر F_{avg} مقدار متوسط $\vec{F}(t)$ در حین برخورد و Δt مدت زمان برخورد باشد، آنگاه برای حرکت یک‌بُعدی داریم

$$J = F_{avg}\Delta t \qquad (۹-۳۵)$$

وقتی جریان پایایی از اجسام، هریک به جرم m و تندی v، با جسمی برخورد کنند که در مکانی ثابت شده است، نیروی متوسط وارد بر آن جسم ثابت برابر است با

$$F_{avg} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v \qquad (۹-۳۷)$$

که $n/\Delta t$ آهنگی است که با آن اجسام به جسم ثابت برخورد می‌کنند و Δv تغییر سرعت هریک از اجسام برخوردکننده است. این نیروی متوسط را می‌توان چنین نیز نوشت

$$F_{avg} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v \qquad (۹-۴۰)$$

که در آن $\Delta m/\Delta t$ آهنگی است که با آن جرم با جسم ثابت برخورد می‌کند. در معادله‌های ۹-۳۷ و ۹-۴۰، اگر اجسام بر اثر برخورد متوقف شوند $\Delta v = -v$ و اگر آن‌ها مستقیماً رو به عقب و بدون تغییر در تندی واجهند $\Delta v = -2v$ است.

پایستگی تکانه‌ی خطی اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، به‌طوری‌که هیچ نیروی خارجی خالصی بر آن وارد نشود، تکانه‌ی خطی $\vec{P}$ ی دستگاه ثابت باقی می‌ماند:

$$\vec{P} = \text{ثابت} \quad (\text{دستگاه بسته‌ی منزوی}) \qquad (۹-۴۲)$$

که آن را چنین نیز می‌توان نوشت:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (\text{دستگاه بسته‌ی منزوی}) \qquad (۹-۴۳)$$

شاخص‌های پایین اشاره به مقدارهای $\vec{P}$ در یک زمان اولیه و در زمانی دیرتر دارند. معادله‌های ۹-۴۲ و ۹-۴۳ عبارت‌های هم‌ارزی برای **قانون پایستگی تکانه‌ی خطی** هستند.

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

برخورد ناکشسان در یک‌بُعد در برخورد *ناکشسان* دو جسم، انرژی جنبشی دستگاه دو ذره‌ای پایسته نیست. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، تکانه‌ی خطی کلّ دستگاه باید پایسته باشد، که آن را می‌توانیم به صورت برداری چنین بنویسیم

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad (۹-۵۰)$$

شاخص‌های پایین i و f، به ترتیب اشاره به مقدارهای تکانه درست پیش و درست پس از برخورد دارند.

اگر حرکت اجسام در راستای یک تک‌محور باشد، برخورد یک‌بُعدی است و معادله‌ی ۹-۵۰ را می‌توانیم برحسب مؤلفه‌های سرعت در راستای آن محور بنویسیم:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (۹-۵۱)$$

اگر اجسام به یکدیگر بچسبند، برخورد کاملاً *ناکشسان* است و اجسام دارای سرعت نهایی یکسان V هستند (چرا که به هم می‌چسبند).

حرکت مرکز جرم مرکز جرم یک دستگاه بسته‌ی منزوی که شامل دو جسم برخوردکننده است، تحت تأثیر برخورد قرار نمی‌گیرد. به‌خصوص، سرعت $\vec{v}_{com}$ مرکز جرم بر اثر برخورد تغییر نمی‌کند.

برخورد کشسان در یک‌بُعد برخورد *کشسان* نوع خاصی از برخورد است که در آن انرژی جنبشی دستگاه اجسامی که برخورد می‌کنند پایسته است. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، تکانه‌ی خطی آن نیز پایسته است. برای برخورد یک‌بُعدی که در آن جسم ۲ هدف و جسم ۱ پرتابه‌ی فرودی است، پایستگی انرژی جنبشی و تکانه‌ی خطی رابطه‌های زیر را برای سرعت‌ها، بلافاصله پس از برخورد، به‌دست می‌دهند:

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

مرور و خلاصه‌ی درس

مکان زاویه‌ای برای توصیف چرخش یک جسم صلب حول محوری ثابت، موسوم به **محور چرخش**، یک **خطّ مرجع** ثابت را در جسم فرض کنیم، که عمود بر آن محور است و با جسم می‌چرخد. **مکان زاویه‌ای** θی این خط را نسبت به جهتی ثابت اندازه می‌گیریم. وقتی θ برحسب **رادیان** اندازه‌گیری شود، داریم

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \qquad (۱-۱۰)$$

که در آن s طول کمان مسیری دایره‌ای به شعاع r و زاویه‌ای θ است. رابطه‌ی میان مقیاس رادیان با مقیاس‌های اندازه‌گیری زاویه برحسب دور و برحسب درجه عبارت است از

$$1\,\text{rev} = 360° = 2\pi\,\text{rad} \qquad (۲-۱۰)$$

@sharifjozve96

جابه‌جایی زاویه‌ای جسمی که حول یک محور چرخش می‌چرخد، با تغییر مکان زاویه‌ای خود از θ_1 به θ_2، **جابه‌جایی زاویه‌ای** زیر را انجام می‌دهد

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (۴-۱۰)$$

طوری‌که $\Delta\theta$ برای چرخش پادساعتگرد، مثبت و برای چرخش ساعتگرد، منفی است.

سرعت و تندی زاویه‌ای اگر جسمی در بازه‌ی زمانی Δt به اندازه‌ی جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta$ بچرخد، **سرعت زاویه‌ای متوسط** ω_{avg} آن عبارت است از

Scanned by CamScanner

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (۵-۱۰)$$

سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای) ωی این جسم عبارت است از

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (۶-۱۰)$$

ω_{avg} و ω هر دو بردارند و جهت آن‌ها با استفاده از **قاعده‌ی دست‌راست** شکل ۱۰-۶ به‌دست می‌آید. اگر چرخش پادساعتگرد باشد، مثبت و اگر ساعتگرد باشد، منفی است. بزرگی سرعت زاویه‌ای جسم، همان **تندی زاویه‌ای** است.

شتاب زاویه‌ای اگر سرعت زاویه‌ای جسمی در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$، از $\omega_۱$ به $\omega_۲$ تغییر کند، **شتاب زاویه‌ای متوسط** α_{avg} جسم عبارت است از

$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_۲ - \omega_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (۷-۱۰)$$

و شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای) αی جسم به‌صورت زیر است

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (۸-۱۰)$$

α_{avg} و α هر دو بردارند.

معادله‌های سینماتیکی برای شتاب زاویه‌ای ثابت حرکت با *شتاب زاویه‌ای ثابت* ($\alpha =$ ثابت) حالت خاص مهمی از حرکت چرخشی است. معادله‌های سینماتیکی این حالت، که در جدول ۱۰-۱ داده شده‌اند، عبارت‌اند از

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (۱۰-۱۲)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (۱۰-۱۳)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (۱۰-۱۴)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \quad (۱۰-۱۵)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (۱۰-۱۶)$$

رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای نقطه‌ای از جسم صلب چرخان، در *فاصله‌ی قائم* r از محور چرخش، روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. اگر جسم به اندازه‌ی زاویه‌ی θ بچرخد، آن نقطه کمانی به طول s را طی می‌کند که چنین داده می‌شود

$$s = \theta r \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \quad (۱۰-۱۷)$$

که در آن θ برحسب رادیان است.

سرعت خطی $\vec{v}$ ی نقطه، مماس بر دایره است؛ تندی خطی v ی نقطه چنین داده می‌شود

$$v = \omega r \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \quad (۱۰-۱۸)$$

که در آن ω تندی زاویه‌ای جسم (بر حسب رادیان بر ثانیه) است.

شتاب خطی $\vec{a}$ ی نقطه، هم *مؤلفه‌ی مماسی* و هم *مؤلفه‌ی شعاعی* دارد. مؤلفه‌ی مماسی آن عبارت است از

$$a_t = \alpha r \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \quad (۱۰-۲۲)$$

که α بزرگی شتاب زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر مجذور ثانیه) است و برای مؤلفه‌ی شعاعی داریم

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \quad (۱۰-۲۳)$$

اگر نقطه در حرکت دایره‌ای یکنواخت باشد، دوره‌ی چرخش T ی نقطه و جسم عبارت است از

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \quad (۱۰-۱۹ \text{ و } ۱۰-۲۰)$$

انرژی جنبشی چرخشی و لختی چرخشی انرژی جنبشی K ی جسم صلبی که حول محور ثابتی می‌چرخد، چنین داده می‌شود

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(در مقیاس رادیان)} \quad (۱۰-۳۴)$$

که در آن I **لختی چرخشی** جسم است که برای دستگاهی از ذرات گسسته چنین تعریف می‌شود

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (۱۰-۳۳)$$

و برای جسمی با توزیع جرمی پیوسته، به‌صورت

$$I = \int r^2\, dm \quad (۱۰-۳۵)$$

r و r_i در این دو عبارت، فاصله‌ی عمودی از محور چرخش را تا هریک از عناصر جرمی جسم نشان می‌دهند، و انتگرال‌گیری روی کلِّ جسم انجام می‌شود تا هر عنصر جرمی را شامل شود.

قضیه‌ی محورهای موازی *قضیه‌ی محورهای موازی*، لختی چرخشی I ی جسم حول هر محور را به‌لختی چرخشی همان جسم حول محوری موازی که از مرکز جرم آن می‌گذرد، مربوط می‌کند:

$$I = I_{\text{com}} + Mh^2 \quad (۱۰-۳۶)$$

که در آن h فاصله‌ی قائم بین دو محور، و I_{com} لختی‌چرخشی جسم حول محور عبوری از مرکز جرم است. h را می‌توانیم فاصله‌ای توصیف کنیم که محور چرخش واقعی از محور چرخش عبوری از مرکز جرم انتقال یافته است.

گشتاور نیرو *گشتاور نیرو* عمل چرخاندن یا پیچاندن یک جسم حول یک محور چرخش توسط نیرویی مانند $\vec{F}$ است. اگر $\vec{F}$ بر نقطه‌ای اثر کند که با بردار مکان $\vec{r}$ نسبت به محور داده شده است، آنگاه بزرگی گشتاور نیرو عبارت است از

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF\sin\phi \quad (۱۰-۳۹ \text{ و } ۱۰-۴۰ \text{ و } ۱۰-۴۱)$$

که F_t مؤلفه‌ی $\vec{F}$ عمود بر $\vec{r}$ و ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. کمیت $r_\perp$ عمود بر فاصله‌ی بین محور چرخش و راستای خطی است که از بردار $\vec{F}$ می‌گذرد. این خط، **خطِّ اثر** $\vec{F}$ و $r_\perp$ **بازوی گشتاور** $\vec{F}$ خوانده می‌شود. به همین ترتیب، r بازوی گشتاور F_t است.

یکای SI ی گشتاور نیرو، نیوتون ـ متر (N.m) است. گشتاور نیروی τ اگر جسم ساکن را پادساعتگرد بچرخاند، مثبت و اگر آن را ساعتگرد بچرخاند، منفی است.

قانون دوم نیوتون در شکل زاویه‌ای مشابه زاویه‌ای قانون دوم نیوتون عبارت است از

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \quad (۱۰-۴۵)$$

که در آن τ_{net} گشتاور نیروی خالص وارد بر یک ذره یا جسمی صلب، I لختی چرخشی ذره یا جسم حول محور چرخش، و α شتاب زاویه‌ای حاصل، حول آن محور است.

کار و انرژی جنبشی چرخشی معادله‌هایی که برای محاسبه‌ی کار و توان در حرکت چرخشی استفاده می‌شوند متناظر با معادله‌هایی هستند که برای حرکت انتقالی استفاده می‌شوند و عبارت‌اند از

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta \quad (۱۰-۵۳)$$

و

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad (۱۰-۵۵)$$

وقتی τ ثابت باشد، معادله‌ی ۱۰-۵۳ چنین می‌شود

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (۱۰-۵۴)$$

قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی برای اجسام چرخان، عبارت است از

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad (۱۰-۵۲)$$

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

مرور و خلاصه‌ی درس

اجسام غلتان برای چرخی به شعاع R که در غلتشی هموار است، داریم

$$v_{com} = \omega R$$ (۱۱-۲)

که در آن v_{com} تندی خطی مرکز جرم چرخ و ω تندی زاویه‌ای چرخ حول مرکز آن است. همچنین می‌توان غلتش چرخ را به‌صورت چرخشی لحظه‌ای حول نقطه‌ی تماس P ی "جاده" با چرخ ، درنظر گرفت. تندی زاویه‌ای چرخ حول این نقطه، همان تندی زاویه‌ای چرخ حول مرکزش است. انرژی جنبشی چرخ غلتان عبارت است از

$$K = \frac{1}{2}I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{com}^2$$ (۱۱-۵)

که I_{com} لختی چرخشی چرخ حول مرکز جرمش و M جرم چرخ است. اگر چرخ شتابدار شود ولی همچنان در چرخشی هموار باشد، شتاب مرکز جرم $\vec{a}_{com}$ چرخ با رابطه‌ی زیر به‌شتاب زاویه‌ای α حول این مرکز مربوط می‌شود

$$a_{com} = \alpha R$$ (۱۱-۶)

اگر چرخ در غلتش هموار رو به‌پایینی بر شیبی با زاویه‌ی θ باشد، شتاب آن در راستای محور x عبوری از سطح شیبدار چنین می‌شود

$$a_{com,x} = -\frac{g\sin\theta}{1+I_{com}/MR^2}$$ (۱۱-۱۰)

گشتاور نیرو به‌عنوان یک بردار در سه‌بُعد، گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ کمیتی برداری است که نسبت به یک نقطه‌ی ثابت (معمولاً یک مبدأ مختصات) تعریف می‌شود و برابر است با

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$ (۱۱-۱۴)

که در آن $\vec{F}$ نیروی وارد بر ذره و $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به آن نقطه‌ی ثابت است. بزرگی $\vec{\tau}$ چنین داده می‌شود

$$\tau = rF\sin\phi = rF_\perp = r_\perp F$$ (۱۱-۱۷ و ۱۱-۱۶ و ۱۱-۱۵)

که ϕ زاویه‌ی میان $\vec{F}$ و $\vec{r}$، $F_\perp$ مؤلفه‌ی $\vec{F}$ عمود بر $\vec{r}$، و $r_\perp$ بازوی گشتاور $\vec{F}$ است. جهت $\vec{\tau}$ با استفاده از قاعده‌ی دست راست به‌دست می‌آید.

تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره *تکانه‌ی زاویه‌ای* $\vec{\ell}$ ذره‌ای با تکانه‌ی خطی $\vec{p}$، جرم m، و سرعت خطی $\vec{v}$، کمیتی است برداری که نسبت به یک نقطه‌ی ثابت (معمولاً یک مبدأ مختصات) چنین تعریف می‌شود

$$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v})$$ (۱۱-۱۸)

بزرگی $\vec{\ell}$ با رابطه‌های زیر داده می‌شود

$$\ell = rmv\sin\phi$$ (۱۱-۱۹)

$$= rp_\perp = rmv_\perp$$ (۱۱-۲۰)

$$= r_\perp p = r_\perp mv$$ (۱۱-۲۱)

که ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{p}$، $p_\perp$ و $v_\perp$ به‌ترتیب مؤلفه‌های $\vec{p}$ و $\vec{v}$ عمود بر $\vec{r}$، و $r_\perp$ فاصله‌ی قائم میان آن نقطه‌ی ثابت و امتداد $\vec{p}$ است. جهت $\vec{\ell}$ با استفاده از قاعده‌ی دست راست برای ضرب‌های برداری به‌دست می‌آید.

شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون قانون دوم نیوتون برای یک تک‌ذره را در شکل زاویه‌ای می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$ (۱۱-۲۳)

که $\vec{\tau}_{net}$ گشتاور نیروی خالص وارد بر ذره و $\vec{\ell}$ تکانه‌ی زاویه‌ای ذره است.

تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاهی از ذرات تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{L}$ دستگاهی از ذرات، جمع برداری تکانه‌های زاویه‌ای تک‌تک ذرات آن است:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{\ell}_i$$ (۱۱-۲۶)

آهنگ زمانی تغییر این تکانه‌ی زاویه‌ای برابر با گشتاور نیروی خارجی خالص وارد بر دستگاه (جمع برداری گشتاورهای نیروی ناشی از برهم‌کنش‌های ذرات دستگاه با ذرات خارج از دستگاه) است:

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ (دستگاهی از ذره‌ها) (۱۱-۲۹)

تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صلب برای جسم صلبی که حول محور ثابتی در چرخش است، مؤلفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای آن موازی با محور چرخش عبارت است از

$$L = I\omega$$ (برای جسم صلب، حول محور ثابت) (۱۱-۳۱)

پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{L}$ یک دستگاه درصورتی ثابت باقی می‌ماند که گشتاور نیروی خالص خارجی وارد بر دستگاه برابر با صفر باشد

$\vec{L} =$ ثابت (دستگاه منزوی) (۱۱-۳۲)

یا

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$ (دستگاه منزوی) (۱۱-۳۳)

این همان قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای است.

حرکت تقدیمی یک ژیروسکوپ یک ژیروسکوپ چرخان می‌تواند حول محور قائم عبوری از تکیه‌گاه آن با آهنگ زیر حرکت تقدیمی انجام دهد

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$ (۱۱-۴۶)

که در آن M جرم ژیروسکوپ، r بازوی گشتاور، I لختی چرخشی، و ω آهنگ چرخش است.

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

مرور و خلاصه‌ی درس

تعادل ایستا به‌جسم صلبی که در حال سکون است می‌گویند **تعادل ایستا** دارد. برای چنین جسمی، جمع برداری نیروهای خارجی وارد بر آن برابر با صفر است:

$$\vec{F}_{net} = 0$$ (موازنه‌ی نیروها) (۱۲-۳)

اگر همه‌ی نیروها در صفحه‌ی xy واقع باشند، این معادله‌ی برداری هم‌ارز دو معادله‌ی مؤلفه‌ای می‌شود:

$$F_{net,x} = 0 \quad , \quad F_{net,y} = 0$$ (موازنه‌ی نیروها) (۱۲-۷ و ۱۲-۸)

تعادل ایستا همچنین حاکی از آن است که جمع برداری گشتاور نیروهای خارجی وارد بر جسم حول هر نقطه‌ای برابر با صفر است، و یا

$$\vec{\tau}_{net} = 0$$ (موازنه‌ی گشتاورهای نیرو) (۱۲-۵)

اگر نیروها در صفحه‌ی xy واقع باشند، همه‌ی بردارهای گشتاور نیرو موازی محور z اند، و معادله‌ی ۱۲-۵ هم‌ارز با معادله‌ی تک‌مؤلفه‌ای زیر است

$$\tau_{net,z} = 0$$ (موازنه گشتاورهای نیرو) (۱۲-۹)

مرکز گرانی نیروی گرانشی بر تک‌تک اجزای یک جسم وارد می‌شود. اثر خالص همه‌ی این نیروهای مجزا را می‌توان هم‌ارز با یک نیروی گرانشی کل پنداشت که بر **مرکز گرانی** وارد می‌آید. اگر شتاب گرانشی $\vec{g}$ برای همه‌ی اجزای یک جسم برابر باشد، مرکز گرانی در مرکز جرم جسم قرار دارد.

مدول‌های کشسانی برای توصیف رفتار کشسانی (تغییر شکل) اجسام تحت‌تأثیر نیروهای وارد بر آن‌ها، از سه **مدول کشسانی** استفاده می‌شود. **کرنش** (تغییر نسبی طول) از طریق مدول خاصی به‌طور خطی با **تنش** (نیرو بر واحد سطح) وارد شده رابطه دارد که شکل کلی آن چنین است

(۱۲-۲۲)

تنش = مدول × کرنش

کشش و تراکم وقتی جسمی تحت تأثیر کشش یا تراکم قرار می‌گیرد، معادله‌ی ۱۲-۲۲ چنین نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$ (۱۲-۲۳)

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

که در آن $\Delta L / L$ کرنش کششی یا تراکمی جسم، F بزرگی نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ که موجب کرنش می‌شود، A مساحت سطح مقطعی که $\vec{F}$ عمود بر آن (مانند شکل ۱۲–۱۰الف) وارد می‌شود، و E **مدول یانگ** جسم است. تنش برابر F / A است.

برش وقتی جسمی تحت تأثیر تنش برشی قرار گیرد، معادله‌ی ۱۲–۲۲ چنین نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L} \qquad (۱۲–۲۴)$$

که در آن $\Delta x / L$ کرنش برشی جسم، Δx جابه‌جایی یک سر جسم ر جهت نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ (مانند شکل ۱۲–۱۰ب)، و G مدول **برشی** جسم است. تنش برابر F / A است.

تنش هیدرولیک وقتی جسمی تحت تأثیر *تراکم هیدرولیکی* ناشی از تنش وارد شده از سوی شاره‌ی اطراف خود قرار گیرد، معادله‌ی ۱۲–۲۲ چنین نوشته می‌شود

$$p = B \frac{\Delta V}{V} \qquad (۱۲–۲۵)$$

که در آن p فشار (*تنش هیدرولیکی*) وارد بر جسم از سوی شاره، $\Delta V / V$ (کرنش) قدرمطلق تغییر نسبی حجم جسم بر اثر آن فشار، و B **مدول کپه‌ای** جسم است.

رسش ها

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner

مرور و خلاصه‌ی درس

قانون گرانش هر ذره‌ای در عالم، ذره‌ای دیگر را با یک نیروی گرانشی جذب می‌کند که بزرگی آن عبارت است از

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(قانون گرانش نیوتون)} \qquad (۱-۱۳)$$

که در آن m_1 و m_2 جرم ذرات، r فاصله‌ی جدایی آن‌ها، و $G(= 6.67\times 10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2)$ ثابت گرانشی است.

رفتار گرانشی پوسته‌های کروی یکنواخت معادله‌ی ۱۳-۱ فقط برای ذرات برقرار است. نیروی گرانشی میان اجسام پیوسته را در حالت کلی باید با جمع بستن (انتگرال‌گیری) تک‌تکِ نیروهای وارد بر تک‌تکِ ذرات داخل اجسام به‌دست آورد. ولی اگر یکی از اجسام، پوسته‌ی کروی یکنواخت یا جسم توپُری با تقارن کروی باشد، نیروی گرانشی خالصی را که بر جسمی *خارجی* وارد می‌کند می‌توان محاسبه کرد، طوری که گویی همه‌ی جرم پوسته یا جسم توپُر در مرکز آن قرار گرفته باشد.

برهم‌نهی نیروهای گرانشی از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند؛ یعنی، اگر n ذره برهم‌کنش کنند، نیروی خالص $\vec{F}_{1,net}$ وارد بر ذره‌ای که با نماد ۱ مشخص شده است برابر جمع نیروهایی است که در یک زمان از طرف ذره‌های دیگر بر آن وارد می‌شود

$$\vec{F}_{1,net} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i} \qquad (۵-۱۳)$$

که در آن جمع، یک جمع برداری از نیروهای $\vec{F}_{1i}$ وارد از ذرات ۲، ۳، ... n بر ذره‌ی ۱ است. نیروی گرانشی $\vec{F}_1$ وارد از یک جسم پیوسته بر یک ذره را می‌توان با تقسیم آن جسم به اجزایی با جرم دیفرانسیلی dm به‌دست آورد، طوری‌که هر جزء، یک نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F}$ را بر آن ذره وارد می‌سازد، و آنگاه با انتگرال‌گیری مجموع این نیروها را به‌دست آورد

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} \qquad (۶-۱۳)$$

شتاب گرانشی *شتاب گرانشی* a_gی یک ذره (به جرم m) فقط ناشی از نیروی گرانشی وارد بر آن است. وقتی ذره در فاصله‌ی r از مرکز جسم کروی یکنواختی به جرم M قرار دارد، بزرگی F نیروی گرانشی وارد بر ذره با معادله‌ی ۱۳-۱ داده می‌شود. بنابراین، با استفاده از قانون دوم نیوتون

$$F = ma_g \qquad (۱۰-۱۳)$$

خواهیم داشت

$$a_g = \frac{GM}{r^2} \qquad (۱۱-۱۳)$$

شتاب سقوط آزاد و وزن چون جرم کره زمین به‌طور یکنواختی توزیع نشده است، و چون این سیاره کره کاملی نیست، و چون به دور خود می‌چرخد، شتاب سقوط آزاد $\vec{g}$ی یک ذره در نزدیکی کره زمین اندکی با شتاب گرانشی $\vec{a}_g$ فرق دارد، و وزن ذره (برابر با mg) با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر ذره، که از معادله‌ی ۱۳-۱ محاسبه می‌شود، تفاوت می‌کند.

گرانش در درون یک پوسته‌ی کروی پوسته‌ی یکنواختی از ماده هیچ نیروی گرانشی خالصی بر ذره‌ای که در درون آن قرار گرفته است، وارد نمی‌کند. این بدان معنی است که اگر ذره‌ای درون یک کره توپر یکنواخت به فاصله‌ی r از مرکز آن قرار گرفته باشد، نیروی گرانشی وارد بر آن ذره تنها ناشی از جرمی است که در درون کره‌ای به شعاع r قرار گرفته است. بزرگی این نیرو چنین داده می‌شود

$$F = \frac{GmM}{R^3}r \qquad (۱۹-۱۳)$$

که در آن m جرم کره و R شعاع آن است.

انرژی پتانسیل گرانشی انرژی پتانسیل گرانشی $U(r)$ دستگاهی دو ذره‌ای با جرم‌های M و m که به فاصله‌ی r از هم قرار گرفته‌اند، برابر با منفیِ کاری است که توسط نیروی گرانشی یکی از ذرات بر ذره‌ی دیگر وارد می‌شود، اگر فاصله‌ی بین ذرات از نامتناهی (بسیار دور) تا r تغییر کند. این انرژی عبارت است از

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۲۱-۱۳)$$

انرژی پتانسیل یک دستگاه اگر دستگاهی شامل بیش از دو ذره باشد، انرژی پتانسیل گرانشی کلّ U آن برابر با مجموع انرژی‌های پتانسیل همه‌ی جفت ذرات آن است. مثلاً برای سه ذره به جرم‌های m_1، m_2 و m_3 داریم

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right) \qquad (۲۲-۱۳)$$

تندی فرار یک جسم در صورتی می‌تواند از جاذبه‌ی گرانشی جسمی نجومی به جرم M و شعاع R فرار کند (یعنی، به فاصله‌ای نامتناهی برسد) که تندی آن در نزدیکی سطح جسم نجومی دست‌کم برابر با تندی فرار باشد، که چنین داده می‌شود

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (۲۸-۱۳)$$

قوانین کپلر جاذبه‌ی گرانشی، منظومه‌ی شمسی را در کنار هم نگه می‌دارد و این امکان را می‌دهد که ماهواره‌ها، چه طبیعی و چه مصنوعی، بر گرد زمین بچرخند. چنین حرکت‌هایی از سه قانون حرکت و گرانش نیوتون هستند:

۱. ***قانون مدارها.*** همه‌ی سیاره‌ها در مدارهایی بیضی‌شکل حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانون‌های آن قرار گرفته است.

@sharifjozveg6

Scanned by CamScanner

۲. ***قانون مساحت‌ها.*** خطی که هر سیاره را به خورشید وصل می‌کند، در بازه‌های زمانی مساوی، مساحت‌های یکسانی را جاروب می‌کند.

۳. ***قانون دوره‌ها.*** مربع دوره‌ی چرخش T ی هر سیاره، متناسب با یک مکعب نیم‌محور بزرگ a ی آن مدار است. برای مدارهای دایره‌ای با شعاع r داریم

$$T^{۲} = \left(\frac{۴\pi^{۲}}{GM}\right) r^{۳} \quad \text{(قانون دوره‌ها)} \qquad (۱۳-۳۴)$$

که در آن M جرم جسم جذب‌کننده است، که برای منظومه‌ی شمسی همان خورشید است. برای مدارهای سیاره‌ای بیضی‌شکل، نیم‌محور بزرگ a به جای r قرار داده می‌شود.

انرژی در حرکت سیاره‌ای وقتی سیاره یا ماهواره‌ای به جرم m بر مداری دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل U و انرژی جنبشی K ی آن چنین داده می‌شود

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{و} \quad K = \frac{GMm}{۲r} \qquad (۱۳-۲۱ \text{ و } ۱۳-۳۸)$$

آنگاه انرژی مکانیکی $E = K + U$ چنین می‌شود

$$E = -\frac{GMm}{۲r} \qquad (۱۳-۴۰)$$

که برای مداری بیضی‌شکل با نیم‌محور بزرگ a برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{۲a} \qquad (۱۳-۴۲)$$

نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی گرانش اینشتین نشان داد که گرانش و شتاب، هم‌ارزند. این **اصل هم‌ارزی** او را به نظریه‌ی گرانش (**نظریه‌ی نسبیت عام**) رهنمون ساخت، که اثرهای گرانشی را بر مبنای خمیدگی فضا توضیح می‌دهد.

@sharifjozve96

Scanned by CamScanner